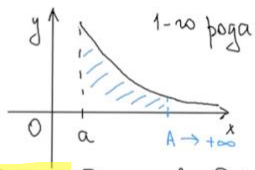
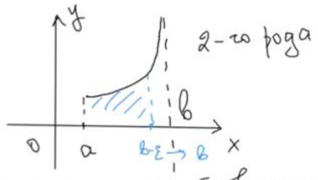




II р.

Опр. 1 Пусть $f \in R[a,A]$ $\forall A > a$. Несобственным интегралом 1-го рода от ф-ции f на $[a,+\infty)$ наз-ся выражение $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx$.

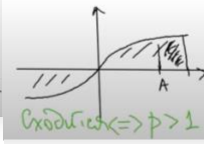
Если предел в правой части сущ-т, то говорят, что инт-л сходится, иначе – расходится.

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx := \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_A^a f(x)\,dx$, если $f \in R[A,a]$ $\forall A < a$.

По определению $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx =$

$= \lim\limits_{A_1\to-\infty} \int\limits_{A_1}^a f(x)\,dx + \lim\limits_{A_2\to+\infty} \int\limits_a^{A_2} f(x)\,dx$, $f \in R[A_1,A_2]$ $\forall A_1 \leq A_2$.

Инт-л в левой части сходится $\Leftrightarrow$ существуют оба предела в правой части.



Пример $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \underset{p\neq 1}{=} \lim\limits_{A\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^A = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{+\infty} =$

$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ +\infty, & p<1 \end{cases}$; $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} = +\infty$

Сходится $\Leftrightarrow p > 1$

Т.1 (замена перем-й в несобств. инт-ле 1-го рода)

Пусть 1) $f \in C[a,+\infty)$;

2) $\varphi \in C^1[\alpha,+\infty)$;

3) φ возр-т на $[\alpha,+\infty)$; $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$; $\varphi(\alpha) = a$.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

(оба инт-ла сх-ся и расх-ся одновременно; в случае сх-ти равны).

Д-во: Пусть $A > a$, тогда $\exists!\, \beta > \alpha$, т.ч. $\varphi(\beta) = A$. Значит $\int_a^A f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

$A\to+\infty \Leftrightarrow \beta\to+\infty$ ч.т.д.

Замеч-е: Можно, например, расс-ть замену $\varphi: (-\infty;\alpha] \to [a,+\infty)$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

$\int\limits_a^b fg'\,dx = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g\,dx$

$\int\limits_a^{+\infty} fg'\,dx = fg\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{b} f'g\,dx$

Т.2 (интегр-е по частям). Пусть $f, g \in C^1[a,+\infty)$ и сущ-т $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ сх-ся или расх-ся одновременно и в случае сходимости: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = L - f(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$.

Д-во: $\forall A > a$: $\int_a^A f(x)g'(x)\,dx = f(A)g(A) - f(a)g(a) - \int_a^A f'(x)g(x)\,dx$

$A\to+\infty$ ч.т.д.

Примеры: 1) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t & x=e \Leftrightarrow t=1 \\ \frac{1}{x}dx = dt & x=+\infty \Leftrightarrow t=+\infty \end{matrix} \right| =$

$= \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -t^{-1}\Big|_1^{+\infty} = 0 + 1 = 1$.

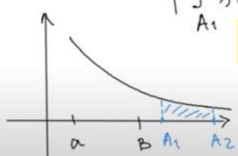
2) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^2\,de^{-x} = \underbrace{-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx =$

$= -2\int_0^{+\infty} x\,de^{-x} = \underbrace{-2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}}_{0=} + 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0 + 2 = 2$

Т.3 (критерий Коши сх-ти несобств. инт-ла 1-го рода)

Пусть $f \in R[a,A]$ $\forall A > a$. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1, A_2 \in (B;+\infty)$:

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$



(кр. Коши сущ-я предела ф-ции при $A\to+\infty$)

Д-во: Обозначим $F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$.

$\exists \lim\limits_{A\to+\infty} F(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1, A_2 \in (B;+\infty)$: $|F(A_2) - F(A_1)| < \varepsilon$

$F(A_2) - F(A_1) = \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx$

ч.т.д.

Т.4 (признак сравнения)

1) Пусть $f \in R[a,A]$ $\forall A > a$ и $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,+\infty)$. Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся.

2) Пусть $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расх-ся, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх-ся.

Д-во: 1) Возьмем $\varepsilon > 0$. $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся $\Rightarrow$ $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1, A_2$, $B < A_1 < A_2$: $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \leq$

$\leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx = \left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся (кр. Коши)

2) От противного: пусть $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $x \geq a$. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх-ся, то $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже сх-ся (пункт 1), а это не так по условию. ч.т.д.

На практике: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$ достаточно, чтобы нер-ва из усл-я теоремы выполнялись $\forall x \geq b$.

Замечание. Из Т.4 $\Rightarrow$ если $f, g \geq 0$ и $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} C\cdot g(x)$ $(C \neq 0)$, то инт-лы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся или расх-ся одновременно.

Опр. 1 Пусть ф-ция f определена на $[a,b)$; $f \in R[a,b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon \in (0;b-a)$; $f \notin R[a,b]$. Интегралом (несобственным) 2-го рода от f на $[a,b]$ наз-ся выражение $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx =: \int\limits_a^b f(x)\,dx$